

ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՄԱՐԳԱՐՅԱՆ ԼԻԼԻԹ ՄԿՐՏՉԻ

ՄԻԿՐՈՊՈԼՅԱՐ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՁՈՂԵՐԻ  
ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՄԱՆ  
ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՍՈՂԵԼՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄ ԵՎ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ  
ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆ

Ա 02.04

«Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա» մասնագիտությամբ ֆիզիկական առարկաների և մեխանիկայի ոլորտում ինտեգրացիոն մեթոդների կիրառման հարցերի և խնդիրների լուծման հարցերի վերաբերյալ

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ 2012

---

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

МАРГАРЯН ЛИЛИТ МКРТЫЧЕВНА

ПОСТРОЕНИЕ ПРИКЛАДНЫХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ  
СОСТОЯНИЙ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ  
ОРТОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ И ИХ СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук по специальности 01.02.04- «Механика  
деформируемого твердого тела»

ЕРЕВАН 2012

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ մեխանիկայի ինստիտուտում:  
Գիտականդեկավար՝ ՀՀ ԳԱԱ թղթ.-անդամ, ֆ.մ.գ.դ., պրոֆ. Ս. Ն. Սարգսյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ տ.գ.դ., պրոֆեսոր՝ Լ.Ա.Մովսիսյան  
ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր՝ Գ.Ռ. Ղուլդազարյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Հայաստանի պետական ճարտարագիտական  
համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2012թ. դեկտեմբերի 21-ին՝ ժամը 15<sup>30</sup>-ին  
ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող Մեխանիկայի-  
047 մասնագիտական խորհրդում  
(հասցեն՝ 0019 ք. Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող., 24/2) [avsah@machins.sci.am](mailto:avsah@machins.sci.am)

Ատենախոսության ըկարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի գրադ  
արանում:

Սեղմագիրն առաքված է 19 նոյեմբերի 2012թ.

Մասնագիտական խորհրդի գիտական  
քարտուղար, ֆ.մ.գ.դ.



Ս.Վ. Սահակյան

---

Тема диссертации утверждена в Институте механики НАН РА

Научный руководитель: член-корр. НАН РА, д.ф.м.н., профессор С.О.Саркисян

Официальные оппоненты: д.т.н., профессор Л.А. Мовсисян  
д.ф.м.н., профессор Г.Р. Гулгазарян

Ведущая организация: Государственный инженерный университет Армении

Защита состоится 21-ого декабря 2012г. в 15<sup>30</sup> часов на заседании  
Специализированного совета 047 в Институте механики НАН РА  
(адрес: 0019 г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2) [avsah@machins.sci.am](mailto:avsah@machins.sci.am)

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА.

Автореферат разослан 19 ноября 2012г.

Ученый секретарь  
Специализированного совета, д.ф.м.н.



А.В. Саакян

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** В настоящее время, когда весьма бурно развивается нанотехнология, при которой на атомно-молекулярном уровне создаются структуры новых материалов, а также, композитов, естественно применение структурно-феноменологических моделей для изучения деформационных свойств таких тел в макромасштабе. Структурно-феноменологический подход занимает промежуточное положение между классической теорией упругости и модельным описанием среды на атомном уровне. Микрополярная (несимметричная, моментная) теория упругости является одним из современных теоретических моделей структурно-феноменологического описания напряженно-деформированного состояния (НДС) тел с внутренней структурой.

Микрополярная теория упругости впервые изложена в монографии Э. и Ф. Коссера 1909г. Дальнейшее развитие эта теория получила в работах А.А. Адамова, Э.Л. Аэро, Г.Е. Багдасаряна, А.Г. Багдоева, П.А. Белова, В.В. Болотина, Г.Л. Бровко, Е.Ф. Грековой, П.А. Жилина, А.А. Ильюшина, И.А. Кунина, С.А. Лурье, Н.Ф. Морозова, В.А. Пальмова, В.Е. Панина, Б.Е. Победри, Г.Н. Савина, И.Ю. Смолина, П.В. Трусова, R. de Borst, A.C. Eringen, W.T. Koiter, G.A. Maugin, A.V. Metrikine, R.D.Mindlin, D. Natroshvili, W. Nowacki, Ostoja-Strazewski и др.

Микрополярная теория упругости хорошо зарекомендовала себя при решении задач статики при наличии концентраторов напряжений в окрестности вершин трещин, отверстий и выточек. К различным статическим задачам в рамках микрополярной теории упругости посвящены работы Э.Л. Аэро, А.Н. Булигина, Ю.М. Григорьева, В.В. Корепанова, М.А. Кулеша, В.П. Матвееенко, Н.Ф. Морозова, В.А. Пальмова, Г.Н. Савина, И.Н. Шардакова, J. Dszlewicz, S. Forest, D. Iesen, W.T. Koiter, R.D. Mindlin, W. Nowacki, Ostoja-Strazewski и др.

Изучение динамических процессов и, в частности, волновых эффектов в твердых телах с микроструктурой на основе микрополярной теории упругости является одним из актуальных задач механики деформируемого твердого тела. Знание о динамических, в том числе и волновых процессах очень важно, поскольку они являются эффективным инструментом исследования НДС, а также структуры и свойств твердых тел. Изучению специфики распространения волн и других динамических задач в микрополярных средах посвящены работы М.В. Белубекяна, М.П. Варыгиной, В.И. Ерофеева, М.А. Кулеша, А.Е. Лялина, В.Ф. Манукяна, В.П. Матвееенко, И.С. Павлова, В.А. Пирожкова, А.И. Потапова, Г.Н. Савина, О.В. Садовской, В.М. Садовского, Р.Д. Степанова, А.Г. Угодчикова, И.Н. Шардакова, I.D. Achenbach, W. Nowacki и др.

На основе микрополярной теории упругости начали строиться теории стержней, пластин и оболочек в работах Г.А. Геворкяна, П.А. Жилина, В.А. Пальмова, Л.И. Шкутина, Н.А. Altenbach, A.C.Eringen, A.E.Green, P.M. Naghdi, E. Reissner и др. В дальнейшем к этой проблеме были посвящены работы С.А. Амбарцумяна, М.В. Белубекяна, Г.Л. Бровко, Г.А. Ванина, В.А. Еремеева, Л.М. Зубова, О.А. Ивановой, Л.А. Мовсисяна, Н. Altenbach, M. Birsan, P.A. Neff, W. Pietraszkiewicz, M.B. Rubin, F.V. Wang и др.

В НАН Армении изучение проблем построения теорий и решения конкретных задач статики и динамики микрополярных упругих тонких оболочек и пластин впервые выполнено С.А. Амбарцумяном.

Прикладные модели стержней, пластин и оболочек по классической теории упругости, в том числе и уточненной, построены на основе известных гипотез Бернулли, Кирхгофа-Лява, Амбарцумяна, Рейсснера, Тимошенко.

Метод разложения в степенные ряды, либо в ряды по полиномам Лежандра по толщинной координате для построения моделей упругих стержней, пластин и оболочек развивались в работах Cauchy, Poisson, И.Н. Векуа, Н.А. Кильчевского, И.Т. Селезова и др. В микрополярной теории упругости этот метод применялся в работе К.А. Жамакочяна, С.О. Саркисяна и Л.И. Маневича (2012) для построения модели микрополярных упругих тонких пластин.

Асимптотический метод, как один из основных методов прикладной математики, обособанно применяется в классической теории упругости для построения моделей тонких пластин и оболочек в работах К. Friedrichs, A. Green, А.Л. Гольденвейзера, И.И. Воровича, E. Reissner и в дальнейшем этот метод существенно развит в работах Л.А. Агаловяна, В.Л. Бердичевского, М.И. Гуссейн-Заде, Ю.Д. Каплунова, Л.Ю. Коссовича, С.А. Назарова, Е.В. Нольде, Н.Н. Рогачевой, С.О. Саркисяна, Ю.А. Устинова, P.G. Giarlet и др.

Когда имеются неклассические граничные условия, асимптотический метод в теории упругих тонких пластин и оболочек развит в работах Л.А. Агаловяна, его учеников и коллег М.Л. Агаловяна, Р.С. Геворкяна, Л.Г. Гулгазарян, Л.С. Саркисян, А.А. Хачатряна и др.

Регулярные асимптотические методы в теории упругих анизотропных оболочек и пластин развит в работах В.С. Саркисяна.

Асимптотический метод в теории микрополярной упругости впервые применен в работе В.А. Дудникова и С.А. Назарова (1982) для изучения НДС тонкой пластинки. Асимптотический метод в микрополярной теории упругости для изучения задач об определении НДС стержней, пластин и оболочек в дальнейшем существенно развит благодаря работам С.О. Саркисяна и его учеников А.А. Атояна, Г.С. Айрапетян, Ш.И. Алваджян, С.А. Варданян, М.Н. Мутафян, Г.С. Никогосяна, А.А. Саркисян, А.Ж. Фарманян и др.

В работах А.Л. Гольденвейзера (1976), С.А. Амбарцумяна, Г.Е. Багдасаряна и М.В. Белубекяна (1977), С.О. Саркисяна (1992) развит метод гипотез для построения теорий оболочек и магнитоупругости тонких пластин и оболочек, сформулированных на основе асимптотического интегрирования краевых задач трехмерной теории упругости и магнитоупругости в тонких областях пластин и оболочек.

Основная проблема общей теории микрополярных упругих тонких оболочек и пластин (стержней) заключается в приближенном, но адекватном сведении трехмерной (двумерной) задачи микрополярной теории упругости к двумерной (одномерной) краевой задаче. С этой точки зрения весьма эффективен подход С.О. Саркисяна, суть которого заключается в следующем: на основе качественных сторон результата интегрирования трехмерной (двумерной) граничной задачи в тонкой области оболочки, пластинки (прямоугольника) формулируются адекватные гипотезы, на основе которых строятся общие прикладные двумерные (одномерные) модели статики и динамики оболочек, пластин (стержней).

В настоящее время, на основе подхода С.О. Саркисяна, актуально построение прикладных моделей статики и динамики микрополярных упругих анизотропных, в частности, ортотропных однослойных и многослойных стержней, пластин и оболочек.

Настоящая диссертационная работа посвящена к построению прикладных моделей динамики микрополярных упругих ортотропных стержней на основе метода гипотез, асимптотическому интегрированию плоской динамической начально-краевой задачи

микрополярной теории упругости для ортотропного материала в тонкой области прямоугольника, построению прикладной одномерной асимптотической модели динамики микрополярных упругих ортотропных стержней, обоснованию сформулированных гипотез, изучению задач свободных и вынужденных колебаний, а также динамической устойчивости микрополярных упругих ортотропных стержней, установлению специфических свойств микрополярного ортотропного материала.

***Целью диссертационной работы является:***

- обобщение гипотез С.О. Саркисяна для построения математической модели динамики микрополярных упругих ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений;
- построение математической модели динамики микрополярных упругих ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений с учетом и без учета поперечных сдвиговых деформаций;
- получение уравнения баланса энергии и построение вариационного уравнения типа Гамильтона-Остроградского для плоской динамической задачи микрополярной теории упругости для ортотропного материала;
- построение частных динамических моделей микрополярных упругих ортотропных стержней со стесненным вращением и “с малой сдвиговой жесткостью”, как с учетом поперечных сдвиговых деформаций, так и без их учета;
- развитие асимптотического метода интегрирования плоской начально-граничной задачи микрополярной теории упругости для ортотропного материала в области тонкого прямоугольника; построение и решение внутреннего итерационного процесса, погранслоев по координатам и времени; установление свойств погранслоевых величин; построение одномерных уравнений асимптотической модели микрополярных упругих ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений;
- сращивание асимптотических разложений внутреннего итерационного процесса с погранслоями (погранслои по координатам и времени); получение граничных и начальных условий для одномерных уравнений внутренней задачи;
- построение прикладной одномерной асимптотической модели динамики микрополярных упругих ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений; обоснование принятых гипотез на основе сравнения общей и асимптотической одномерных моделей динамики микрополярных упругих ортотропных стержней;
- на основе построенных моделей с независимыми полями перемещений и вращений, со стесненным вращением и “с малой сдвиговой жесткостью” (с учетом и без учета поперечных сдвигов) изучение задач о свободных и вынужденных колебаниях микрополярных упругих ортотропных стержней, выявление эффектов микрополярности ортотропного материала, сравнительный анализ построенных моделей;
- постановка и изучение задачи о динамической устойчивости центрально-сжатого микрополярного упругого ортотропного стержня, определение главных областей динамической неустойчивости и установление специфических особенностей микрополярного ортотропного материала.

**Научная новизна.** В диссертационной работе

- обобщаются гипотезы С.О. Саркисяна для построения математической модели динамики микрополярных упругих ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений;
- построена прикладная одномерная математическая модель динамики микрополярных упругих ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений с учетом и без учета поперечных сдвиговых деформаций;
- получено уравнение баланса энергии и построено вариационное уравнение типа Гамильтона-Остроградского для плоской динамической задачи микрополярной теории упругости для ортотропного материала;
- построены частные динамические модели микрополярных упругих ортотропных стержней со стесненным вращением и “с малой сдвиговой жесткостью”, как с учетом поперечных сдвиговых деформаций, так и без их учета;
- развит асимптотический метод интегрирования плоской начально-граничной задачи микрополярной теории упругости для ортотропного материала в области тонкого прямоугольника; построены и решены внутренний итерационный процесс, погранслои по координатам и времени; установлены свойства погранслоевых величин; построены одномерные уравнения асимптотической модели микрополярных упругих ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений;
- изучена задача сращивания внутреннего итерационного процесса и погранслоев (погранслои по координатам и времени); определены граничные и начальные условия для одномерных уравнений внутренней задачи;
- построена прикладная одномерная асимптотическая модель динамики микрополярных упругих ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений; обоснованы принятые гипотезы на основе сравнения общей и асимптотической одномерных моделей динамики микрополярных упругих ортотропных стержней;
- на основе построенных моделей с независимыми полями перемещений и вращений, со стесненным вращением и “с малой сдвиговой жесткостью” (с учетом и без учета поперечных сдвигов) изучена задача о свободных изгибных колебаниях микрополярных упругих ортотропных стержней, определены собственные частоты и формы собственных колебаний, установлены специфические свойства микрополярного ортотропного материала, выполнен сравнительный анализ;
- на основе построенных моделей с независимыми полями перемещений и вращений, со стесненным вращением и “с малой сдвиговой жесткостью” (с учетом и без учета поперечных сдвигов) изучена задача о вынужденных изгибных колебаниях микрополярных упругих ортотропных стержней, определены амплитуды вынужденных колебаний и условия резонанса, установлены специфические свойства микрополярного ортотропного материала, выполнен сравнительный анализ;
- поставлена и изучена задача о динамической устойчивости центрально-сжатого микрополярного упругого ортотропного стержня, определены главные области динамической неустойчивости и установлены специфические свойства микрополярного ортотропного материала стержня.

**Практическая ценность работы.** Полученные в диссертации результаты могут быть использованы при изучении различных динамических задач микрополярных упругих ортотропных стержней, в экспериментах для определения внутренней структуры и физических констант микрополярного упругого ортотропного материала.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на:

- Международной школе-конференции молодых ученых: Механика 2009 (Агавнадзор 28 сентября-1 октября 2009, Армения)
- Международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды” (Дилижан 4-8 октября 2010, Армения)
- Научных конференциях профессорско-преподавательского состава Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна (Гюмри 2009, 2010, 2011, Армения)
- XXXIX Summer School-Conference. Advanced Problems in Mechanics. APM 2011 (St. Petersburg (Repino) July 1-5 2011, Russia)
- 13<sup>th</sup> International Conference of Mesomechanics (Vicenza 6-8 July 2011, Italy)
- Всероссийской конференции Нелинейные колебания механических систем (Нижний Новгород 24-28 сентября 2012, Россия)
- Международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, посвященной столетию академика Нагуша Арутюняна (Цахкадзор 8-12 октября 2012, Армения)
- Семинаре “Механика тонкостенных систем” института механики НАН Армении (Ереван 23 октября 2012, Армения)
- Общем семинаре Института механики НАН Армении (Ереван 8 ноября 2012, Армения)

**Публикации.** По теме диссертации опубликованы 9 научных работ, список которых приводится в конце автореферата.

**Структура и объём работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 190 наименований. Общий объём работы составляет 117 страниц печатного текста, включая 4 таблиц и 15 рисунков.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертационной работы, дан краткий обзор работ отечественных и зарубежных авторов, связанных с рассмотренными в диссертации вопросами. Изложена теоретическая и практическая ценность работы, дано краткое описание работы по главам.

**Глава первая** диссертационной работы посвящена построению прикладной одномерной модели динамики микрополярных упругих ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений с учётом и без учета поперечных сдвигов на основе метода гипотез. Для прикладной одномерной модели динамики микрополярных упругих ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений построено вариационное уравнение типа Гамильтона-Остроградского. В этой же главе построены частные прикладные одномерные модели

динамики микрополярных упругих ортотропных стержней со стесненным вращением и “с малой сдвиговой жесткостью” с учётом и без учета поперечных сдвигов.

**В §1.1.** приведена математическая модель плоской динамической начально-граничной задачи микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений для прямоугольника ( $0 \leq x_1 \leq a$ ,  $-h \leq x_2 \leq h$ ):

Уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, & \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \mu_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial x_2} + \sigma_{12} - \sigma_{21} &= I \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Соотношения упругости:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= A_{11}\varepsilon_{11} + A_{12}\varepsilon_{22}, & \sigma_{22} &= A_{12}\varepsilon_{11} + A_{22}\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{12} &= A_{77}\varepsilon_{12} + A_{78}\varepsilon_{21}, & \sigma_{21} &= A_{78}\varepsilon_{12} + A_{88}\varepsilon_{21}, & \mu_{13} &= B_{66}\chi_{13}, & \mu_{23} &= B_{44}\chi_{23}, \end{aligned} \quad (2)$$

либо в обратной форме

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sigma_{11} - \frac{A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sigma_{22}, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sigma_{22} - \frac{A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sigma_{11}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{A_{88}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sigma_{12} - \frac{A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sigma_{21}, \\ \varepsilon_{21} &= \frac{A_{77}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sigma_{21} - \frac{A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sigma_{12}, \\ \chi_{13} &= \frac{1}{B_{66}} \mu_{13}, & \chi_{23} &= \frac{1}{B_{44}} \mu_{23}. \end{aligned} \quad (3)$$

Геометрические соотношения:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \omega_3, \quad \varepsilon_{21} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_3, \quad \chi_{13} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1}, \quad \chi_{23} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2}. \quad (4)$$

Здесь  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}$  - силовые, а  $\mu_{13}, \mu_{23}$  - моментные напряжения;  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}$  - компоненты деформации;  $\chi_{13}, \chi_{23}$  - компоненты изгиба-кручений;  $u_1, u_2$  - перемещения, а  $\omega_3$  - независимый поворот точек прямоугольника вокруг оси  $x_3$ ;  $A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{77}, A_{78}, A_{88}, B_{66}, B_{44}$  - упругие коэффициенты микрополярного ортотропного материала.

К определяющим уравнениям (1)-(4) плоской динамической задачи микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений присоединены соответствующие граничные и начальные условия.

На лицевых сторонах прямоугольника  $x_2 = \pm h$  считаются заданными силовые и моментные граничные условия:

$$\sigma_{21} = \pm X^\pm(x_1, t), \quad \sigma_{22} = \pm Y^\pm(x_1, t), \quad \mu_{23} = \pm M^\pm(x_1, t). \quad (5)$$



На боковой кромке прямоугольника  $x_1=0$  (аналогично на  $x_1=a$ ) приняты следующие варианты граничных условий несимметричной теории упругости:

1-ая граничная задача (загруженный край):

$$\sigma_{11}|_{x_1=0} = \varphi_1(x_2, t), \quad \sigma_{12}|_{x_1=0} = \varphi_2(x_2, t), \quad \mu_{13}|_{x_1=0} = \varphi_3(x_2, t). \quad (6)$$

2-ая граничная задача (зашемленный край):

$$u_1|_{x_1=0} = 0, \quad u_2|_{x_1=0} = 0, \quad \omega_3|_{x_1=0} = 0. \quad (7)$$

3-ая граничная задача (смешанные условия):

$$\sigma_{11}|_{x_1=0} = \varphi_1(x_2, t), \quad u_2|_{x_1=0} = 0, \quad \mu_{13}|_{x_1=0} = \varphi_3(x_2, t). \quad (8)$$

Здесь  $\varphi_1(x_2, t)$ ,  $\varphi_2(x_2, t)$ ,  $\varphi_3(x_2, t)$  заданные функции в интервале  $[-h, h]$ .

Начальные условия при  $t=0$  заданы следующим образом:

$$u_i|_{t=0} = f_i(x_1, x_2), \quad \omega_3|_{t=0} = f_3(x_1, x_2), \quad (9)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{t=0} = F_1(x_1, x_2), \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}\Big|_{t=0} = F_2(x_1, x_2), \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial t}\Big|_{t=0} = F_3(x_1, x_2),$$

где  $f_i(x_1, x_2)$ ,  $F_i(x_1, x_2)$  ( $i=1, 2, 3$ ) заданные функции в области прямоугольника.

В дальнейшем рассматривается обратная-симметричная задача (т.е. задача изгиба), где (5) примет следующий вид:

$$\sigma_{21}|_{x_2=\pm h} = \frac{1}{2}(X^+ - X^-), \quad \sigma_{22}|_{x_2=\pm h} = \pm \frac{1}{2}(Y^+ + Y^-), \quad \mu_{23}|_{x_2=\pm h} = \pm \frac{1}{2}(M^+ + M^-). \quad (10)$$

Имея в виду соответствие между упругими коэффициентами для изотропного и ортотропного материалов, из двумерных динамических уравнений (1)-(4) микрополярно-ортотропного материала сразу получены двумерные динамические уравнения для микрополярно-изотропного материала.

В зависимости от значений физических параметров из основных двумерных уравнений (1)-(4) плоской динамической задачи микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений получены двумерные динамические уравнения известных частных теорий. Именно:

- Если имеет место следующее условие для физических параметров

$$A_{77} = A_{88} = A_{78} = A, \quad (11)$$

из (1)-(4) получены двумерные динамические уравнения классической теории для ортотропного материала.

- Иногда вместо формул для  $\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{21}$  из (3), (4) более удобно рассматривать их сумму и разность, т.е.

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - 2\omega_3 = \frac{A_{88} + A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sigma_{12} - \frac{A_{77} + A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sigma_{21}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{A_{88} - A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sigma_{12} + \frac{A_{77} - A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sigma_{21}.$$

Если здесь физические параметры  $\frac{A_{88} + A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}$ ,  $\frac{A_{77} + A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}$  принимают бесконечно малые значения, то из первого уравнения (12) получим следующую формулу:

$$2\omega_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}. \quad (13)$$

А это в свою очередь означает, что из (1)-(4) получаются двумерные динамические уравнения частной микрополярной теории со стесненным вращением для ортотропного материала.

• Если вместо формул для  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{21}$  из (2) рассматривать их сумму и разность, т.е.

$$\sigma_{12} + \sigma_{21} = (A_{77} + A_{78})\varepsilon_{12} + (A_{78} + A_{88})\varepsilon_{21}, \quad (14)$$

$$\sigma_{12} - \sigma_{21} = (A_{77} - A_{78})\varepsilon_{12} + (A_{78} - A_{88})\varepsilon_{21},$$

и потребовать, чтобы коэффициенты  $A_{77} - A_{78}$ ,  $A_{78} - A_{88}$  были бесконечно малыми,

а  $A_{77} + A_{78}$ ,  $A_{78} + A_{88}$  конечными величинами, то получим следующее условие:

$$\sigma_{12} - \sigma_{21} \rightarrow 0. \quad (15)$$

Имея ввиду полученное условие (15), из двумерных динамических уравнений (1)-(4) микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений будут отделяться “моментная” и “силовая” части задачи, т.е. получены двумерные динамические уравнения частной микрополярной теории “с малой сдвиговой жесткостью” для ортотропного материала. Следует также заметить, что система уравнений “силовой” части не совпадает с системой уравнений классической теории ортотропных стержней.

Двумерные уравнения движения (1) и граничные условия (5)-(8) плоской динамической задачи микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений получены также с помощью вариационного принципа Гамильтона-Остроградского:

$$\delta W - \delta K - \delta L = 0, \quad (16)$$

где  $W$  - объемная плотность потенциальной энергии деформации;  $K$  - кинетическая энергия;  $L$  - виртуальная работа внешних сил и моментов. Для этого сначала выведен закон сохранения энергии для микрополярного ортотропного материала:

$$L = \iint_S W dS + K, \quad (17)$$

где

$$W = \frac{1}{2} A_{11} \varepsilon_{11}^2 + \frac{1}{2} A_{22} \varepsilon_{22}^2 + A_{12} \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \frac{1}{2} A_{77} \varepsilon_{12}^2 + \frac{1}{2} A_{88} \varepsilon_{21}^2 + A_{78} \varepsilon_{12} \varepsilon_{21} + \frac{1}{2} B_{66} \chi_{13}^2 + \frac{1}{2} B_{44} \chi_{23}^2, \quad (18)$$

$$K = \frac{1}{2} \iint_S \left( \rho \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \rho \left( \frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 + I \left( \frac{\partial \omega_3}{\partial t} \right)^2 \right) dS, \quad (19)$$

$$L = \int_0^a \left( \frac{1}{2} (X^+ - X^-) u_1 + \frac{1}{2} (Y^+ + Y^-) u_2 + \frac{1}{2} (M^+ + M^-) \omega_3 \right) \Big|_{x_2=+h} dx_1 + \int_0^a \left( -\frac{1}{2} (X^+ - X^-) u_1 + \frac{1}{2} (Y^+ + Y^-) u_2 + \frac{1}{2} (M^+ + M^-) \omega_3 \right) \Big|_{x_2=-h} dx_1 - \quad (20)$$

$$- \int_{-h}^{+h} \left( \sigma_{11} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \sigma_{12} \frac{\partial u_2}{\partial t} + \mu_{13} \frac{\partial \omega_3}{\partial t} \right) \Big|_{x_1=0} dx_2 + \int_{-h}^{+h} \left( \sigma_{11} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \sigma_{12} \frac{\partial u_2}{\partial t} + \mu_{13} \frac{\partial \omega_3}{\partial t} \right) \Big|_{x_1=a} dx_2.$$

Для получения двумерных уравнений движения (1) и граничных условий (5)-(8) плоской микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений с помощью вариационного принципа Гамильтона-Остроградского, введен следующий функционал:

$$\begin{aligned} I = & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \iint_S \left[ \frac{1}{2} A_{11} \varepsilon_{11}^2 + \frac{1}{2} A_{22} \varepsilon_{22}^2 + A_{12} \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \frac{1}{2} A_{77} \varepsilon_{12}^2 + \frac{1}{2} A_{88} \varepsilon_{21}^2 + A_{78} \varepsilon_{12} \varepsilon_{21} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} B_{66} \chi_{13}^2 + \frac{1}{2} B_{44} \chi_{23}^2 \right] dS - \iint_S \left[ \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 + \frac{I}{2} \left( \frac{\partial \omega_3}{\partial t} \right)^2 \right] dS - \right. \\ & \left. - \int_0^a [X^+ u_1 + Y^+ u_2 + M^+ \omega_3]_{x_2=h} dx_1 + \int_0^a [-X^- u_1 - Y^- u_2 - M^- \omega_3]_{x_2=-h} dx_1 + \right. \\ & \left. + \int_{-h}^{h_1} (\varphi_1 u_1 + \varphi_3 \omega_3)_{x_1=0} dx_2 - \int_{-h}^{h_1} (\varphi_1 u_1 + \varphi_3 \omega_3)_{x_1=a} dx_2 + \right. \\ & \left. + \int_{-h}^{h_2} (\varphi_2 u_2)_{x_1=0} dx_2 - \int_{-h}^{h_2} (\varphi_2 u_2)_{x_1=a} dx_2 + \right. \\ & \left. + \int_{h_1}^h (\sigma_{11} (u_1 - u_1^*) + \mu_{13} (\omega_3 - \omega_3^*))_{x_1=0} dx_2 - \int_{h_1}^h (\sigma_{11} (u_1 - u_1^*) + \mu_{13} (\omega_3 - \omega_3^*))_{x_1=a} dx_2 + \right. \\ & \left. + \int_{h_2}^h (\sigma_{12} (u_2 - u_2^*))_{x_1=0} dx_2 - \int_{h_2}^h (\sigma_{12} (u_2 - u_2^*))_{x_1=a} dx_2, \right. \end{aligned} \quad (21)$$

где  $h_1, h_2 \in [-h, h]$  и независимы друг от друга (в зависимости от значений  $h_1, h_2$  получаются граничные условия (6) или (7) или (8)).

**B §1.2.** предполагается, что высота прямоугольника мала по сравнению с его длиной ( $2h \ll a$ ), т.е. рассматривается тонкий прямоугольник. Основная проблема общей теории микрополярных упругих стержней, пластин и оболочек заключается в приближенном, но адекватном сведении начально-граничной задачи микрополярной теории упругости к прикладной одномерной или двумерной модели. Будем исходить из следующей основной концепции: в динамическом случае напряженно-деформированное состояние (НДС) тонкого прямоугольника состоит из внутреннего НДС, охватывающего всю область прямоугольника, погранслоев, локализирующихся вблизи торцов прямоугольника  $x_1 = 0$  и  $x_1 = a$  и погранслоя по независимой координате времени  $t$  около значения  $t = 0$ . Построение прикладной одномерной модели микрополярных стержней тесно связано с построением внутренней задачи.

При этом будем придерживаться идеи С.О. Саркисяна. Считая, что метод гипотез, наряду с чрезвычайной наглядностью, очень быстро и относительно просто для инженерной практики приводит к окончательным результатам, модель микрополярных ортотропных стержней построена на основе метода гипотез. Сами гипотезы будем обосновывать на основе асимптотического метода изучения поставленной двумерной начально-граничной задачи микрополярной теории упругости в тонком прямоугольнике (смотрите в главе 2). Этот подход в случае изотропии микрополярных тонких тел развит в работах С.О. Саркисяна. В случае ортотропии тонкого прямоугольника, как показывает асимптотический анализ, можно обобщить гипотезы, которые приняты в работах С.О. Саркисяна в случае изотропного материала.

Итак, в основу построения модели микрополярных упругих ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений приняты следующие предположения (гипотезы):

1) В процессе деформации первоначально прямолинейный и нормальный к оси симметрии прямоугольника  $x_2$  элемент свободно поворачивается как жесткое целое на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины и не оставаясь перпендикулярным к деформированной оси.

Принятую гипотезу математически запишем в следующем виде:

$$u_1 = x_2 \Psi(x_1, t), \quad u_2 = w(x_1, t) \quad (22)$$

$$\omega_3 = \Omega_3(x_1, t). \quad (23)$$

Таким образом, нормальное к оси симметрии перемещение  $u_2$  является постоянной функцией по толщине прямоугольника, а перемещение  $u_1$  меняется по линейному закону. Следует добавить еще, что поворот  $\omega_3$  тоже является постоянной функцией по толщине прямоугольника. Отметим, что часть (22) принятой гипотезы, по сути дела, представляет собой кинематическую гипотезу Тимошенко в классической теории упругости. Гипотезу (22), (23) в целом, как в работах С.О. Саркисяна, назовем обобщенной на микрополярный случай кинематической гипотезой Тимошенко.

2) При определении деформаций, изгиба-кручений, силовых и моментных напряжений, сначала для силового напряжения  $\sigma_{21}$  примем:

$$\sigma_{21} = \sigma_{21}^0(x_1, t). \quad (24)$$

После определения указанных величин, значение  $\sigma_{21}$  окончательно определяется как сумма значения (24) и результата интегрирования первого уравнения движения из (1), для которого требуется условие, что усредненная по высоте прямоугольника величина была равна нулю.

3) в соотношении упругости для  $\varepsilon_{11}$  из системы уравнений (3) силовое напряжение  $\sigma_{22}$  можно пренебрегать относительно силового напряжения  $\sigma_{11}$ .

**В §1.3.**, при помощи принятых гипотез 1)-3), найдены все величины двумерной динамической задачи микрополярной теории упругости (т.е. компоненты тензоров деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений):

$$\varepsilon_{11} = K_1 x_2, \quad \varepsilon_{22} = 0, \quad \varepsilon_{12} = \Gamma_{12}, \quad \varepsilon_{21} = \Gamma_{21}, \quad \chi_{13} = k_{13}, \quad \chi_{23} = 0, \quad (25)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} K_{11}x_2, \quad \sigma_{12} = A_{77}\Gamma_{12} + A_{78}\Gamma_{21}, \quad \mu_{13} = B_{66}k_{13}, \\ \sigma_{21} &= \sigma_{21}^0 + \left( \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} \frac{\partial K_{11}}{\partial x_1} - \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right) \left( \frac{h^2}{6} - \frac{x_2^2}{2} \right), \\ \sigma_{22} &= \frac{(Y^+ + Y^-)}{2h} x_2, \quad \mu_{23} = \frac{(M^+ + M^-)}{2h} x_2,\end{aligned}\quad (26)$$

где приняты следующие обозначения:

$$K_{11} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}, \quad \Gamma_{12} = \frac{\partial w}{\partial x_1} - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \Psi + \Omega_3, \quad k_{13} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1}. \quad (27)$$

**В §1.4.** с целью приведения двумерной динамической начально-граничной задачи (1)-(10) микрополярной теории упругости к прикладной одномерной, что уже выполнено для деформаций, изгиба-кручений, перемещений, поворота, силовых и моментных напряжений (формулы (22), (23), (25)-(27)), в теории микрополярных стержней вместо компонентов тензоров силовых и моментных напряжений введены эквивалентные им интегральные характеристики- усилия и моменты:

$$N_{12} = \int_{-h}^h \sigma_{12} dx_2, \quad N_{21} = \int_{-h}^h \sigma_{21} dx_2, \quad L_{13} = \int_{-h}^h \mu_{13} dx_2, \quad M_{11} = \int_{-h}^h \sigma_{11} x_2 dx_2. \quad (28)$$

Основная система уравнений прикладной одномерной модели динамической изгибной деформации микрополярных упругих ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений выражается так:

Уравнения движения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} - N_{21} &= -h(X^+ - X^-) + \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = -(Y^+ + Y^-) + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + N_{12} - N_{21} &= -(M^+ + M^-) + 2Ih \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (29)$$

Соотношения упругости:

$$M_{11} = D_{11}K_{11}, \quad N_{12} = c_{77}\Gamma_{12} + c_{78}\Gamma_{21}, \quad N_{21} = c_{78}\Gamma_{12} + c_{88}\Gamma_{21}, \quad L_{13} = d_{66}k_{13}. \quad (30)$$

Геометрические соотношения:

$$K_{11} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}, \quad \Gamma_{12} = \frac{\partial w}{\partial x_1} - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \Psi + \Omega_3, \quad k_{13} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1}. \quad (31)$$

Граничные условия (“смягченные”) на торце стержня  $x_1 = 0 (x_1 = a)$  имеют вид:

$$M_{11} = M_{11}^* \text{ или } \Psi = \Psi^*, \quad N_{12} = N_{12}^* \text{ или } w = w^*, \quad L_{13} = L_{13}^* \text{ или } \Omega_3 = \Omega_3^*. \quad (32)$$

Начальные условия при  $t = 0$  необходимо ставить для  $w, \frac{\partial w}{\partial t}, \Omega_3, \frac{\partial \Omega_3}{\partial t}, \Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ .

В уравнениях (30)  $\Gamma_{12}, \Gamma_{21}$ -сдвиговые деформации в соответствующих плоскостях;  $K_{11}, k_{13}$ -изгибание средней линии стержня от силовых и моментных напряжений соответственно;  $D_{11}, c_{77}, c_{88}, c_{78}, d_{66}$ - жесткостные характеристики стержня:

$$D_{11} = \frac{2h^3}{3} \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}, \quad c_{77} = 2hA_{77}, \quad c_{88} = 2hA_{88}, \quad c_{78} = 2hA_{78}, \quad d_{66} = 2hB_{66}. \quad (33)$$

Система уравнений (29)-(31), (33) можно привести к системе уравнений относительно перемещения  $w$  и поворотов  $\Psi, \Omega_3$ :

$$A_{88}\Psi + A_{78} \frac{\partial w}{\partial x_1} + (A_{88} - A_{78})\Omega_3 - \frac{h^2}{3} \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} = \frac{(X^+ - X^-)}{2} - \frac{h^2}{3} \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2},$$

$$A_{78} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + A_{77} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + (A_{78} - A_{77}) \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1} = -\frac{(Y^+ + Y^-)}{2h} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (34)$$

$$(A_{78} - A_{88})\Psi + (A_{77} - A_{78}) \frac{\partial w}{\partial x_1} - (A_{77} + A_{88} - 2A_{78})\Omega_3 + B_{66} \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial x_1^2} = -\frac{(M^+ + M^-)}{2h} + I \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}.$$

Отметим, что в построенной прикладной одномерной динамической модели (29)-(33) с независимыми полями перемещений и вращений микрополярных упругих ортотропных стержней полностью учитываются поперечные сдвиговые деформации.

Рассмотрена также задача получения одномерных уравнений движения (29) и граничных условий (32) модели с независимыми полями перемещений и вращений с помощью вариационного принципа Гамильтона-Остроградского. Заметим, что соотношения упругости (30), геометрические соотношения (31) и начальные условия считаются заданными. Имея в виду принятые гипотезы 1), 2), 3) модели с независимыми полями перемещений и вращений и формулы (22),(23),(25)-(27), функционал (21) для одномерной динамической модели микрополярных стержней примет следующий вид:

$$I_0 = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^a \left[ \frac{h^3}{3} \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} K_{11}^2 + hA_{77}\Gamma_{12}^2 + hA_{88}\Gamma_{21}^2 + 2hA_{78}\Gamma_{12}\Gamma_{21} + hB_{66}k_{13}^2 \right] dx_1 - \right.$$

$$\left. - \int_0^a \left[ \frac{h^3}{3} \rho \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 + \rho h \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I h \left( \frac{\partial \Omega_3}{\partial t} \right)^2 \right] dx_1 - \right.$$

$$\left. - \int_0^a \left[ h(X^+ - X^-)\Psi + (Y^+ + Y^-)w + (M^+ + M^-)\Omega_3 \right] dx_1 \pm \right. \quad (35)$$

$$\left. \pm \int_{-h}^{h_1} (\varphi_1 x_2 \Psi + \varphi_3 \Omega_3)_{x_1=0}^{x_1=a} dx_2 + \int_{-h}^{h_2} (\varphi_2 w)_{x_1=0}^{x_1=a} dx_2 + \right.$$

$$\left. \pm \int_{h_1}^h \left[ x_2 \frac{3M_{11}}{2h^3} (x_2 \Psi - x_2 u_1^*) + \frac{L_{13}}{2h} (\Omega_3 - \omega_3^*) \right]_{x_1=0}^{x_1=a} dx_2 \pm \int_{h_2}^h \left[ \frac{N_{12}}{2h} (w - u_2^*) \right]_{x_1=0}^{x_1=a} dx_2 \right\} dt.$$

Обращая в нуль первую вариацию для  $I_0$ , приходим к одномерным уравнениям движения (29) и граничным условиям (32) модели с независимыми полями перемещений и вращений.

**В §1.5.** построены частные прикладные модели динамики микрополярных упругих ортотропных стержней.

1. *Динамическая модель без учета поперечных сдвигов.* Если в одномерной прикладной модели (29)-(33) с независимыми полями перемещений и вращений микрополярных упругих ортотропных стержней будем пренебрегать поперечными сдвигами, т.е. если будем считать

$$\Psi = -\frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad (36)$$

тогда приходим к модели микрополярных стержней, когда нормальный элемент поворачивается, оставаясь перпендикулярным к деформированной оси стержня. Основная система динамических уравнений изгибной деформации микрополярных упругих ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений, когда в основу гипотеза (36), будет иметь вид:

Уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} - N_{21} &= -h(X^+ - X^-) - \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2}, \quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = -(Y^+ + Y^-) + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + N_{12} - N_{21} &= -(M^+ + M^-) + 2Ih \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (37)$$

Соотношения упругости:

$$M_{11} = D_{11}K_{11}, \quad N_{12} = c_{77}\Gamma_{12} + c_{78}\Gamma_{21}, \quad N_{21} = c_{78}\Gamma_{12} + c_{88}\Gamma_{21}, \quad L_{13} = d_{66}k_{13}. \quad (38)$$

Геометрические соотношения:

$$K_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \quad \Gamma_{12} = \frac{\partial w}{\partial x_1} - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = -\frac{\partial w}{\partial x_1} + \Omega_3 \quad (\Gamma_{12} = -\Gamma_{21}), \quad k_{13} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1}. \quad (39)$$

В соотношениях упругости (38) приняты обозначения (33). К этой системе уравнений микрополярных ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений следует присоединить граничные условия (32) с учетом (36). Начальные условия при  $t=0$  необходимо ставить для  $w, \frac{\partial w}{\partial t}, \Omega_3, \frac{\partial \Omega_3}{\partial t}$ .

Систему уравнений (37)-(39), (33) можно привести к системе уравнений относительно перемещения  $w$  и поворота  $\Omega_3$ :

$$\begin{cases} -\frac{2h^3}{3} \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2h(A_{77} + A_{88} - 2A_{78}) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - 2h(A_{77} + A_{88} - 2A_{78}) \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1} = \\ = -h \frac{\partial(X^+ - X^-)}{\partial x_1} - (Y^+ + Y^-) - \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial t^2} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ (A_{77} + A_{88} - 2A_{78}) \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} - \Omega_3 \right) + B_{66} \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial x_1^2} = -\frac{(M^+ + M^-)}{2h} + I \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (40)$$

2. *Динамическая модель с независимыми полями перемещений и вращений для микрополярного изотропного упругого стержня.* Уравнения движения (29); Геометрические соотношения (31);

Соотношения упругости:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \frac{2Eh^3}{3} K_{11}, \\ N_{12} &= 2h((\mu + \alpha)\Gamma_{12} + (\mu - \alpha)\Gamma_{21}), \quad N_{21} = 2h((\mu - \alpha)\Gamma_{12} + (\mu + \alpha)\Gamma_{21}), \\ L_{13} &= 2hBk_3, \end{aligned} \quad (41)$$

где  $E$  - модуль Юнга,  $\mu$  - классический модуль сдвига;  $\alpha$  - микрополярный модуль сдвига;  $B$  - упругий модуль вращения.

К этой системе динамических уравнений микрополярных изотропных упругих стержней с независимыми полями перемещений и вращений следует присоединить граничные условия (32). Начальные условия при  $t=0$  необходимо ставить для

$$w, \frac{\partial w}{\partial t}, \Omega_3, \frac{\partial \Omega_3}{\partial t}, \Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

3. Классическая модель динамики ортотропных стержней.

а) С учетом поперечных сдвигов.

Уравнения движения:

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} - N_{21} = -h(X^+ - X^-) + \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = -(Y^+ + Y^-) + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (42)$$

Соотношения упругости:

$$M_{11} = D_{11}K_{11}, \quad N_{12} = N_{21} = c(\Gamma_{12} + \Gamma_{21}). \quad (43)$$

Геометрические соотношения:

$$K_{11} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}, \quad \Gamma_{12} + \Gamma_{21} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \Psi. \quad (44)$$

В соотношениях упругости (43) принято обозначение из (33) для  $D_{11}$  и следующее обозначение:  $c = 2hA$ .

В этом случае граничные условия на торце стержня  $x_1 = 0$  ( $x_1 = a$ ) имеют вид:

$$M_{11} = M_{11}^* \quad \text{или} \quad \Psi = \Psi^*, \quad N_{12} = N_{12}^* \quad \text{или} \quad w = w^*. \quad (45)$$

Начальные условия при  $t=0$  необходимо ставить для  $w, \frac{\partial w}{\partial t}, \Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ .

б) Без учета поперечных сдвигов. Первое соотношение упругости из (43);

Уравнения движения:

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2} = -h \frac{\partial(X^+ - X^-)}{\partial x_1} - (Y^+ + Y^-) - \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (46)$$

Геометрические соотношения:

$$K_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}. \quad (47)$$



В этом случае граничные условия на торце стержня  $x_1 = 0 (x_1 = a)$  имеют вид (45) с учетом (36). Начальные условия при  $t = 0$  необходимо ставить для  $w, \frac{\partial w}{\partial t}$ .

4. Динамическая модель со стесненным вращением для микрополярного ортотропного упругого стержня.

а) С учетом поперечных сдвигов. Уравнения движения (29);

Соотношения упругости:

$$M_{11} = D_{11}K_{11}, \quad N_{12} + N_{21} = \frac{1}{2}(c_{77} + c_{88} + 2c_{78})(\Gamma_{12} + \Gamma_{21}), \quad L_{13} = d_{66}k_{13}. \quad (48)$$

Геометрические соотношения:

$$K_{11} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}, \quad \Gamma_{12} + \Gamma_{21} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \Psi, \quad k_{13} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1}, \quad \Omega_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} - \Psi \right). \quad (49)$$

В соотношениях упругости (48) приняты соответствующие обозначения из (33). Граничные условия на торце стержня  $x_1 = 0 (x_1 = a)$  имеют вид (32). Начальные

условия при  $t = 0$  необходимо ставить для  $w, \frac{\partial w}{\partial t}, \Omega_3, \frac{\partial \Omega_3}{\partial t}, \Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ .

б) Без учета поперечных сдвигов.

Уравнения движения:

$$\frac{\partial (M_{11} - L_{13})}{\partial x_1} - N_{12} = -h(X^+ - X^-) + (M^+ + M^-) - \left( \frac{2h^3}{3} \rho + 2Ih \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2}, \quad (50)$$

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = -(Y^+ + Y^-) + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Соотношения упругости:

$$M_{11} = D_{11}K_{11}, \quad N_{12} + N_{21} = \frac{1}{2}(c_{77} + c_{88} + 2c_{78})(\Gamma_{12} + \Gamma_{21}), \quad L_{13} = d_{66}k_{13}. \quad (51)$$

Геометрические соотношения:

$$K_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \quad \Gamma_{12} + \Gamma_{21} = 0 \quad (A_{77} + A_{88} + 2A_{78}) \rightarrow \infty, \quad k_{13} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1}, \quad \Omega_3 = \frac{\partial w}{\partial x_1}. \quad (52)$$

В соотношениях упругости (51) приняты соответствующие обозначения из (33). К этой системе уравнений микрополярных ортотропных стержней со стесненным вращением следует присоединить граничные условия (32) с учетом (36). Начальные

условия при  $t = 0$  необходимо ставить для  $w, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \Omega_3, \frac{\partial \Omega_3}{\partial t}$ .

5. Динамическая модель “с малой сдвиговой жесткостью” для микрополярного ортотропного упругого стержня.

а) С учетом поперечных сдвигов.

“Моментная” часть задачи:

Уравнение движения:

$$\frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} = -(M^+ + M^-) + 2Ih \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}. \quad (53)$$

К уравнению движения (53) присоединяются четвертое соотношение упругости из (30), где принято соответствующее обозначение из (33); четвертое геометрическое соотношение из (31); третье граничное условие из (32); начальные условия при  $t=0$  необходимо ставить для  $\Omega_3, \frac{\partial \Omega_3}{\partial t}$ .

“Силовая” часть задачи: первые два уравнения движения из (29); первые три соотношения упругости из (30), где приняты соответствующие обозначения из (33); первые три геометрические соотношения из (31); граничные условия на торце стержня  $x_1=0(x_1=a)$  имеют вид (45); начальные условия при  $t=0$  необходимо ставить для  $w, \frac{\partial w}{\partial t}, \Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ .

б) Без учета поперечных сдвигов.

“Моментная” часть совпадает со случаем а).

“Силовая” часть задачи: первые два уравнения движения из (37); первые три соотношения упругости из (38), где приняты соответствующие обозначения из (33); первые три геометрические соотношения из (39); граничные условия (45) с учетом (36); начальные условия при  $t=0$  необходимо ставить для  $w, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ .

**Глава вторая** диссертационной работы посвящена асимптотическому анализу двумерной начально-граничной динамической задачи микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений в тонкой области прямоугольника (как сингулярно-возмущенной с малым геометрическим параметром задача). Построены внутренний итерационный процесс и погранслои по координатам и времени. Получены условия затухания погранслоевых решений. Изучено сращивание этих итерационных процессов с целью определения граничных и начальных условий для одномерных динамических уравнений внутренней задачи. На основе результатов исходного приближения внутреннего итерационного процесса построена прикладная одномерная динамическая модель (асимптотическая) микрополярных упругих ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений. В результате сравнения прикладной одномерной асимптотической модели микрополярных упругих ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений с аналогичной моделью, построенной в первой главе на основе метода гипотез, математически обосновываются гипотезы, сформулированные в первой главе диссертационной работы.

**В §2.1.** в двумерных динамических уравнениях (1)-(4) несимметричной теории упругости для ортотропного тела выполнен переход к безразмерным величинам и выполнена замена независимых переменных (координат  $x_1, x_2$  и времени  $t$ ):

$$\xi = \frac{x_1}{a}, \quad \zeta = \frac{x_2}{h}, \quad \tau = \frac{t}{t_0} \left( t_0 = \delta^\omega \frac{h}{c_0} \right), \quad (54)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{A_{\chi 1}}, \quad \bar{\mu}_{i3} = \frac{\mu_{i3}}{aA_{\chi 1}}, \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{a}, \quad \bar{I} = \frac{I}{\delta^k \rho h^2}.$$

Здесь величина  $\omega$  характеризует изменяемость напряженно-деформированного состояния во времени. Следуя И.И. Воровичу (1975) необходимо ввести полную

совокупность безразмерных параметров, которые определяют поставленную задачу. Их можно разбить на три группы:

1) безразмерные параметры, которые определяют геометрию области (в данном случае геометрия задачи определяет основной безразмерный малый параметр  $\delta = h/a \ll 1$ );

2) безразмерные параметры, характеризующие упругие свойства микрополярного ортотропного материала. К этим безразмерным параметрам можно прийти естественным образом:

$$\frac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}, \frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}, \frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}, \frac{A_{11}A_{88}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2},$$

$$\frac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}, \frac{A_{11}A_{77}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}, \frac{a^2A_{11}}{B_{66}}, \frac{a^2A_{11}}{B_{44}}.$$
(55)

В изотропном случае получаются две безразмерные физические параметры  $\mu/\alpha$ ,  $a^2\mu/B$ ;

3) параметры, характеризующие изменчивости внешней нагрузки.

Отметим, что при построении асимптотических разложений, как безразмерные физические параметры (55), так и параметры, характеризующие изменчивость внешней нагрузки, следует представить в асимптотических порядках от основного малого безразмерного геометрического параметра  $\delta$ .

Решение преобразованной таким образом системы отыщено в виде асимптотического разложения (внутреннее асимптотическое разложение)

$$Q = \delta^{-q} \sum \delta^s Q^{(s)},$$
(56)

где  $Q$  - напряжения (силовые и моментные), перемещения и поворот;  $q$  - натуральное число, которое для различных величин разное и определяется из условия получения непротиворечивой рекуррентной системы уравнений в асимптотических приближениях.

Как показывает ход асимптотического метода изучения задачи, для получения прикладной асимптотической одномерной модели с независимыми полями перемещений и вращений микрополярных ортотропных стержней, как основной случай, для физических безразмерных параметров (55) в асимптотических порядках (по малому параметру  $\delta$ ) принимаются следующие значения:

$$\frac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} = O(\delta^0), \frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} = O(\delta^0), \frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} = O(\delta^0),$$

$$\frac{A_{11}A_{88}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} = O(\delta^0), \frac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} = O(\delta^0), \frac{A_{11}A_{77}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} = O(\delta^0),$$

$$\frac{a^2A_{11}}{B_{66}} = O(\delta^0), \frac{a^2A_{11}}{B_{44}} = O(\delta^0).$$
(57)

для изотропного случая  $\alpha/\mu = O(\delta^0)$ ,  $a^2\mu/B = O(\delta^0)$ .

В этом случае для величин  $\omega$ ,  $k$ ,  $q$  получены следующие значения:

$$\omega = -1, \quad k = -2, \quad q = \begin{cases} 0 & \bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{u}_1, \bar{\mu}_{23} \\ 1 & \bar{\sigma}_{21}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{u}_2, \bar{\mu}_{13}, \omega_3 \end{cases}$$
(58)

Имея в виду (57), (58), получены основные динамические уравнения микрополярной двумерной задачи для внутреннего итерационного процесса в асимптотических приближениях:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{11}^{(s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{21}^{(s)}}{\partial \zeta} = \frac{\rho c_0^2}{A_{11}} \frac{\partial^2 \bar{u}_1^{(s-2)}}{\partial \tau^2}, \quad \frac{\partial \bar{\sigma}_{12}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}^{(s)}}{\partial \zeta} = \frac{\rho c_0^2}{A_{11}} \frac{\partial^2 \bar{u}_2^{(s)}}{\partial \tau^2}, \quad (59)$$

$$\frac{\partial \bar{\mu}_{13}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\mu}_{23}^{(s)}}{\partial \zeta} + \bar{\sigma}_{12}^{(s)} - \bar{\sigma}_{21}^{(s)} = \frac{\bar{I} \rho c_0^2}{A_{11}} \frac{\partial^2 \omega_3^{(s)}}{\partial \tau^2}.$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1^{(s)}}{\partial \xi} = \frac{A_{11} A_{22}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \bar{\sigma}_{11}^{(s)} - \frac{A_{11} A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \bar{\sigma}_{22}^{(s)},$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2^{(s)}}{\partial \zeta} = \frac{A_{11}^2}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \bar{\sigma}_{22}^{(s-2)} - \frac{A_{11} A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \bar{\sigma}_{11}^{(s-2)},$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2^{(s)}}{\partial \xi} - \omega_3^{(s)} = \frac{A_{11} A_{88}}{A_{77} A_{88} - A_{78}^2} \bar{\sigma}_{12}^{(s)} - \frac{A_{11} A_{78}}{A_{77} A_{88} - A_{78}^2} \bar{\sigma}_{21}^{(s)}, \quad (60)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1^{(s)}}{\partial \zeta} + \omega_3^{(s)} = \frac{A_{11} A_{77}}{A_{77} A_{88} - A_{78}^2} \bar{\sigma}_{21}^{(s)} - \frac{A_{11} A_{78}}{A_{77} A_{88} - A_{78}^2} \bar{\sigma}_{12}^{(s)},$$

$$\frac{\partial \omega_3^{(s)}}{\partial \xi} = \frac{a^2 A_{11}}{B_{66}} \bar{\mu}_{13}^{(s)}, \quad \frac{\partial \omega_3^{(s)}}{\partial \zeta} = \frac{a^2 A_{11}}{B_{44}} \bar{\mu}_{23}^{(s-2)}.$$

Определяющие задачу величины, которые выражаются через величины исходного приближения, представлены в окончательном размерном виде:

$$w = a \delta^{-1} u_2^{(0)}(\xi, \tau), \quad u_1 = x_2 \delta^{-1} \Psi^{(0)} = x_2 \Psi(x_1, t), \quad \Omega_3 = \delta^{-1} \omega_3^{(0)}(\xi, \tau),$$

$$\sigma_{12} = A_{11} \delta^{-1} \sigma_{12}^{(0)}(\xi, \tau), \quad \sigma_{22} = A_{11} \sigma_{22}^{-(0)}, \quad \sigma_{11} = A_{11} \sigma_{11}^{-(0)}, \quad (61)$$

$$\mu_{13} = A_{11} a \delta^{-1} \mu_{13}^{(0)}(\xi, \tau), \quad \mu_{23} = A_{11} a \mu_{23}^{-(0)},$$

$$\sigma_{21} = A_{11} \delta^{-1} \left[ \sigma_{21}^{(0)} + \delta^2 \left( \frac{1}{6} - \frac{\zeta^2}{2} \right) \left( \frac{\partial \sigma_{11}^{(0)}}{\partial \xi} - \frac{\rho c_0^2}{A_{11}} \frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial \tau^2} \right) \right].$$

С целью приведения двумерной динамической задачи (1)-(10) микрополярной теории упругости к прикладной одномерной модели, в теории микрополярных стержней введены интегральные характеристики-усилия и моменты (28). В итоге получены одномерные динамические уравнения исходного приближения внутреннего итерационного процесса микрополярных ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений:

Уравнения движения:

$$N_{21} - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} = h(X^+ - X^-) - \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = -(Y^+ + Y^-) + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (62)$$

$$\frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + N_{12} - N_{21} = -(M^+ + M^-) + 2Ih \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}.$$

Соотношения упругости:

$$M_{11} = D_{11}K_{11} + \frac{A_{12}}{A_{22}} \frac{h^2}{3} (Y^+ + Y^-),$$

$$N_{12} = c_{77}\Gamma_{12} + c_{78}\Gamma_{21}, \quad N_{21} = c_{78}\Gamma_{12} + c_{88}\Gamma_{21}, \quad (63)$$

$$L_{13} = d_{66}k_{13}.$$

Геометрические соотношения:

$$K_{11} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}, \quad \Gamma_{12} = \frac{\partial w}{\partial x_1} - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \Psi + \Omega_3, \quad k_{13} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1}. \quad (64)$$

В соотношениях упругости (63) величины  $c_{77}, c_{88}, c_{78}, d_{66}, D_{11}$ , - жесткостные характеристики стержня, для которых имеем формулы (33).

Таким образом, асимптотическим методом были получены одномерные уравнения (62)-(64) внутренней задачи для динамической модели микрополярных упругих ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений.

**В §2.2.** построен погранслои по координатам. Для этого в двумерные уравнения (1)-(4) микрополярной теории упругости введены следующие преобразования координат  $x_1, x_2$ , времени  $t$  и выполнен переход к безразмерным величинам по следующим формулам (для бокового края  $x_1 = 0$ ):

$$\xi_1 = \frac{x_1}{h}, \quad \zeta = \frac{x_2}{h}, \quad \tau = \frac{t}{t_0} \left( t_0 = \delta^\omega \frac{h}{c_0} \right), \quad (65)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{A_{11}}, \quad \bar{\mu}_{i3} = \frac{\mu_{i3}}{aA_{11}}, \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{a}, \quad \bar{I} = \frac{I}{\delta^k \rho h^2}.$$

Решение преобразованной таким образом системы отыщено в виде асимптотического разложения

$$R = \delta^{\chi_R} \sum \delta^s R^{(s)}, \quad (66)$$

где  $R$  любая из величин рассматриваемой задачи;  $\chi$  целое число, которое характеризует интенсивность пограничного слоя; изменямость  $\omega$  напряженно-деформированного состояния во времени должна соответствовать значению для внутренней задачи. Имея в виду (57), для величин  $\chi_R, \omega, k$  получены:

$$\chi_{\sigma_{ij}} = \chi, \quad \chi_{\mu_{i3}} = \chi, \quad \chi_{u_i} = \chi + 1, \quad \chi_{\omega_3} = \chi + 1, \quad \omega = -1, \quad k = -2. \quad (67)$$

После подстановки (67) в преобразованную систему безразмерных уравнений, убеждаемся, что для динамической задачи полученные уравнения представляют собой квазистатическую задачу. Это означает, что инерционные члены не входят в уравнения ряда первых приближений и задача совпадает с погранслоиной задачей статики. Там в свою очередь доказываются некоторые свойства решения

погранслошной задачи, которые используются при сращивании асимптотических разложений внутреннего итерационного процесса и погранслоя. Эти свойства иначе названы условиями затухания решения задачи пограничного слоя.

**В §2.3.** построен погранслошной по независимой координате времени  $t$ , считая  $t=0$  своего рода границей, и введено погранслошное явление около этой границы. Это дополнительное НДС имеет ту же изменчивость по координатам, которая имеет внутренняя задача, а по времени имеет большую изменчивость. В двумерные динамические уравнения (1)-(4) микрополярной теории упругости введены преобразования координат и времени и выполнен переход к безразмерным величинам по формулам (54). Решение преобразованной таким образом системы отыщено в виде (56), где

$$\omega = 0, \quad k = -2, \quad q = \begin{cases} 0 & \bar{u}_1, \bar{u}_2, \omega_3, \mu_{13} \\ 1 & \bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{21}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{\mu}_{23} \end{cases} \quad (68)$$

После подстановки (68) в преобразованную таким путем систему безразмерных уравнений, получены соответствующие уравнения в асимптотических приближениях.

Далее все величины задачи выражаются через  $\bar{u}_1^{(0)}, \bar{u}_2^{(0)}, \omega_3^{(0)}$ :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{12}^{(0)} &= \frac{A_{78}}{A_{88}} \bar{\sigma}_{21}^{(0)}, \quad \bar{\sigma}_{21}^{(0)} = \frac{A_{88}}{A_{41}} \frac{\partial \bar{u}_1^{(0)}}{\partial \zeta}, \quad \bar{\sigma}_{11}^{(0)} = \frac{A_{12}}{A_{22}} \bar{\sigma}_{22}^{(0)}, \quad \bar{\sigma}_{22}^{(0)} = \frac{A_{22}}{A_{41}} \frac{\partial \bar{u}_2^{(0)}}{\partial \zeta}, \\ \bar{\mu}_{13}^{(0)} &= \frac{B_{66}}{a^2 A_{41}} \frac{\partial \omega_3^{(0)}}{\partial \xi}, \quad \bar{\mu}_{23}^{(0)} = \frac{B_{44}}{a^2 A_{41}} \frac{\partial \omega_3^{(0)}}{\partial \zeta}. \end{aligned} \quad (69)$$

А для величин исходного приближения  $\bar{u}_1^{(0)}, \bar{u}_2^{(0)}, \omega_3^{(0)}$  в свою очередь получены следующие уравнения гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_i^{(0)}}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{a_i^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_i^{(0)}}{\partial \tau^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega_3^{(0)}}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{a_3^2} \frac{\partial^2 \omega_3^{(0)}}{\partial \tau^2} = 0, \quad (70)$$

где

$$\frac{1}{a_1} = \sqrt{\frac{\rho c_0^2}{A_{88}}}, \quad \frac{1}{a_2} = \sqrt{\frac{\rho c_0^2}{A_{22}}}, \quad \frac{1}{a_3} = \sqrt{I \frac{\rho c_0^2 a^2}{B_{44}}}, \quad i = 1, 2. \quad (71)$$

Граничные условия (10) для этого погранслоя будут однородными и, учитывая формулы (69), примут следующий вид ( $i = 1, 2$ ):

$$\left. \frac{\partial \bar{u}_i^{(0)}}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=\pm 1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \omega_3^{(0)}}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=\pm 1} = 0. \quad (72)$$

Начальные условия для временного погранслоя при  $t=0$  пока ставятся произвольным образом ( $i = 1, 2$ ):

$$u_i|_{t=0} = f_i^*, \quad \frac{\partial u_i}{\partial \tau} \Big|_{t=0} = F_i^*, \quad \omega_3|_{t=0} = f_3^*, \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial \tau} \Big|_{t=0} = F_3^*. \quad (73)$$

Методом разделения переменных решив начально-граничную задачу (70)- (73) получено:

$$\begin{aligned} \bar{u}_i^{(0)} = & d_1^i + d_2^i \tau + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ d_{1k}^i \cos\left(\frac{2k-1}{2} \pi a_i \tau\right) + d_{2k}^i \sin\left(\frac{2k-1}{2} \pi a_i \tau\right) \right] \sin\left(\frac{2k-1}{2} \pi \zeta\right) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ d_{3k}^i \cos(k \pi a_i \tau) + d_{4k}^i \sin(k \pi a_i \tau) \right] \cos(k \pi \zeta), \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \omega_3^{(0)} = & c_1^3 + c_2^3 \tau + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ c_{1k}^3 \cos\left(\frac{2k-1}{2} \pi a_3 \tau\right) + c_{2k}^3 \sin\left(\frac{2k-1}{2} \pi a_3 \tau\right) \right] \sin\left(\frac{2k-1}{2} \pi \zeta\right) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ c_{3k}^3 \cos(k \pi a_3 \tau) + c_{4k}^3 \sin(k \pi a_3 \tau) \right] \cos(k \pi \zeta), \end{aligned} \quad (75)$$

где в частности

$$d_1^i = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \bar{f}_i^*(\zeta) d\zeta, \quad d_2^i = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \bar{F}_i^*(\zeta) d\zeta, \quad c_1^3 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_3^*(\zeta) d\zeta, \quad c_2^3 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F_3^*(\zeta) d\zeta. \quad (76)$$

Следует заметить, что в (76)

$$f_i^* = a \sum \delta^s \bar{f}_i^{*(s)}, \quad f_{.3}^* = \sum \delta^s f_3^{*(s)}, \quad F_i^* = \delta^{-1} c_0 \sum \delta^s \bar{F}_i^{*(s)}, \quad F_3^* = \frac{c_0}{h} \sum \delta^s F_3^{*(s)}. \quad (77)$$

Как видно из общих решений (74),(75), чтобы эти решения были осциллирующими необходимо требовать:  $d_1^i = 0$ ,  $d_2^i = 0$ ,  $c_1^3 = 0$ ,  $c_2^3 = 0$ . Эти условия названы условиями осцилляции. Таким образом, имея в виду выражения (76), условия осцилляции будут иметь следующий вид ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\int_{-1}^1 f_i^*(\zeta) d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^1 F_i^* d\zeta = 0. \quad (78)$$

**В §2.4.** для получения граничных и начальных условий для одномерных уравнений (62)-(64) динамической модели микрополярных упругих ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений в диссертационной работе детально изучены процессы срачивания внутренней задачи и погранслоев по координатам и времени. Для этого следует иметь в виду, что, построены два типа решений: решение внутренней задачи  $Q$  и решения для пограничных слоев  $R^{(1)}, R^{(2)}$ . Их сумма

$$I = Q + R^{(1)} + R^{(2)} \quad (79)$$

является решением исходной краевой задачи несимметричной теории упругости. В итоге срачивания получены следующие граничные и начальные условия для одномерных динамических уравнений (62)-(64):

$$1\text{-ая граничная задача: } M_{11}|_{x_1=0} = \int_{-h}^h x_2 \varphi_1 dx_2, \quad N_{12}|_{x_1=0} = \int_{-h}^h \varphi_2 dx_2, \quad L_{13}|_{x_1=0} = \int_{-h}^h \varphi_3 dx_2.$$

$$2\text{-ая граничная задача: } \Psi|_{x_1=0} = 0, \quad w|_{x_1=0} = 0, \quad \Omega_3|_{x_1=0} = 0.$$

$$3\text{-я граничная задача: } M_{11}|_{x_1=0} = \int_{-h}^h x_2 \varphi_1 dx_2, \quad w|_{x_1=0} = 0, \quad L_{13}|_{x_1=0} = \int_{-h}^h \varphi_3 dx_2.$$

Начальные условия:

$$\Psi|_{t=0} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Big|_{x_2=h} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Big|_{x_2=-h} \right), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \Big|_{x_2=h} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \Big|_{x_2=-h} \right), \quad (80)$$

$$w|_{t=0} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f_2 dx_2, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h F_2 dx_2, \quad \Omega_3|_{t=0} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f_3 dx_2, \quad \frac{\partial \Omega_3}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h F_3 dx_2.$$

**В §2.5.**, сравнивая основные уравнения, граничные и начальные условия прикладной одномерной динамической модели с независимыми полями перемещений и вращений микрополярных упругих ортотропных стержней, построенных на основе асимптотического метода, с основными уравнениями, граничными и начальными условиями той же модели, построенной на основе метода гипотез, убеждаемся, что

разница лишь в выражении момента  $M_{11}$ : речь идет о величине  $\frac{A_{12}}{A_{22}} \frac{h^2}{3} (Y^+ + Y^-)$ ,

которая присутствует в формуле (63) и которая отсутствует в аналогичной формуле (30). Это результат того, что по асимптотическому методу в формуле обобщенного закона Гука (3) для величины  $\varepsilon_{11}$  силовое напряжение  $\sigma_{22}$  не пренебрегается относительно силового напряжения  $\sigma_{11}$ , но по методу гипотез, как и в классической теории, такое пренебрежение оправдано.

Таким образом, можем констатировать, что прикладная одномерная динамическая модель с независимыми полями перемещений и вращений микрополярных упругих ортотропных стержней, построенной на основе метода гипотез, представляет собой асимптотически точную модель.

**Глава третья** диссертационной работы посвящена изучению задач собственных, вынужденных колебаний и динамической устойчивости микрополярных упругих ортотропных стержней. Выявлены особенности динамического поведения стержней из микрополярных материалов.

**В §3.1.** рассмотрены задачи свободных и вынужденных колебаний шарнирно-опертых микрополярных упругих ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений.

Сначала рассмотрена задача свободных колебаний на основе общей одномерной микрополярной модели (29)-(33) с независимыми полями перемещений и вращений, где были полностью учтены поперечные сдвиговые деформации. Основная система уравнений этой общей модели была приведена к системе (34)  $((X^+ - X^-) = (Y^+ + Y^-) = (M^+ + M^-) = 0)$ . К полученной системе дифференциальных уравнений присоединены граничные условия шарнирного опирания:

$$w \Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_1=a}} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1} \Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_1=a}} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \Big|_{x_1=a} = 0. \quad (81)$$

Здесь не будем ставить начальные условия.

Решение полученной граничной задачи представлено в следующем виде:



$$\Psi = \left( A_m'' \cos(p_m t) + B_m'' \sin(p_m t) \right) \cos\left( \frac{m\pi}{a} x_1 \right) + \left( A_0'' \cos(p_0 t) + B_0'' \sin(p_0 t) \right),$$

$$\Omega_3 = \left( A_m' \cos(p_m t) + B_m' \sin(p_m t) \right) \cos\left( \frac{m\pi}{a} x_1 \right) + \left( A_0' \cos(p_0 t) + B_0' \sin(p_0 t) \right), \quad (82)$$

$$w = \left( A_m \cos(p_m t) + B_m \sin(p_m t) \right) \sin\left( \frac{m\pi}{a} x_1 \right),$$

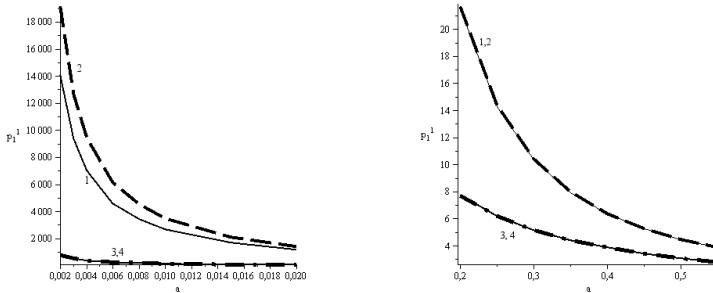
где  $A_m'', B_m'', A_0'', B_0'', A_m', B_m', A_0', B_0', A_m, B_m$  - постоянные;  $p_m, p_0$  - собственные частоты свободных колебаний стержня ( $m=1,2,\dots$ ). Решив поставленную задачу, получены алгебраические уравнения шестой и четвертой степени для определения собственных частот  $p_m, p_0$  колебания микрополярных упругих ортотропных стержней.

Задача свободных колебаний рассмотрена также на основе одномерной микрополярной модели (37)-(39), (33) с независимыми полями перемещений и вращений, где пренебрегались поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

Для материала с физическими данными  $A_{77} = 3.6 \cdot 10^6 \text{ Па}$ ;  $A_{88} = 3.8 \cdot 10^6 \text{ Па}$ ;

$$A_{78} = 0.4 \cdot 10^6 \text{ Па}; \quad \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} = 5.2 \cdot 10^6 \text{ Па}; \quad B_{66} = 300 \text{ Н}; \quad \rho = 1114 \text{ кг} / \text{м}^3;$$

$I = 5.31 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $\delta = 1/40$  результаты численных вычислений в диссертационной работе приведены в таблицах и на рисунках:



**Рис. 1.** Зависимость низкой частоты колебаний  $p_1^1$  стержня от ее размера  $a$ .

На основе проделанных численных экспериментов и построенных графиков сделаны следующие выводы:

- по микрополярной модели упругих стержней с независимыми полями перемещений и вращений, по сравнению классической модели, получается дополнительный спектр свободных колебаний;
- у микрополярного стержня имеется частота колебаний, которая не зависит от ее размеров;
- при данных значениях материальных констант (которые здесь выбраны гипотетически) для довольно малых размеров микрополярного стержня низкие частоты собственных колебаний довольно высокие по сравнению с классической теорией упругого стержня;

- для малых размеров стержня низкие частоты колебания по общей модели (29)-(33) с учетом поперечных сдвигов резко отличаются от частот, полученных по модели (37)-(39), (33), (32), при которой пренебрегались поперечные сдвиги. А для более массивных размеров стержня низкие частоты колебания совпадают по моделям (29)-(33) и (37)-(39), (33), (32). Следует заметить, что на рис. 1 сплошная линия 1 соответствует общей микрополярной модели (29)-(33) с учетом поперечных сдвигов, пунктирная линия 2- микрополярной модели (37)-(39), (33), (32), при которой пренебрегались поперечные сдвиги, сплошная линия 3 и пунктирная линия 4-соответственно классическим теориям типа Тимошенко и Бернулли.

Далее рассмотрена задача вынужденных колебаний на основе общей одномерной микрополярной модели (29)-(33) с независимыми полями перемещений и вращений. Как уже было сказано выше, основная система уравнений этой общей модели была приведена к системе (34). В случае вынужденных колебаний рассмотрены следующие два случая ( $\tilde{p}$ ,  $\tilde{m}$  постоянные):

$$1) \frac{1}{2}(X^+ - X^-) = 0, \quad \frac{1}{2}(Y^+ + Y^-) = \tilde{p}e^{ipt} \sin\left(\frac{\pi}{a}x_1\right), \quad \frac{1}{2}(M^+ + M^-) = 0. \quad (83)$$

$$2) \frac{1}{2}(X^+ - X^-) = 0, \quad \frac{1}{2}(Y^+ + Y^-) = 0, \quad \frac{1}{2}(M^+ + M^-) = \tilde{m}e^{ipt}. \quad (84)$$

Граничные условия шарнирного опирания имеют вид (3.1.3). Здесь не будем ставить начальные условия.

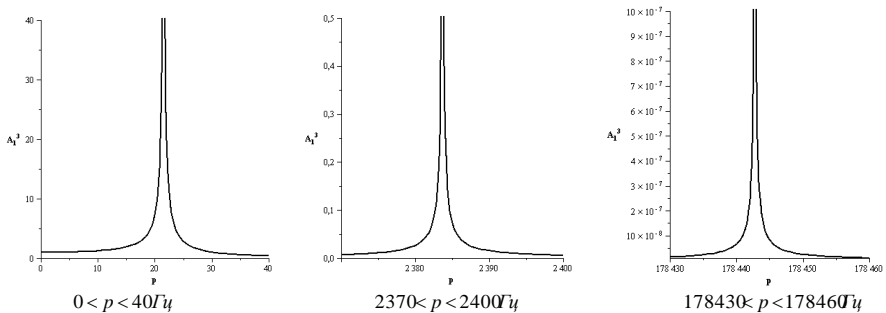
Решение полученных граничных задачи в случае (83) представлено в виде

$$w = A_1^1 e^{ipt} \sin\left(\frac{\pi}{a}x_1\right), \quad \Omega_3 = A_1^2 e^{ipt} \cos\left(\frac{\pi}{a}x_1\right), \quad \Psi = A_1^3 e^{ipt} \cos\left(\frac{\pi}{a}x_1\right), \quad (85)$$

а в случае (84)

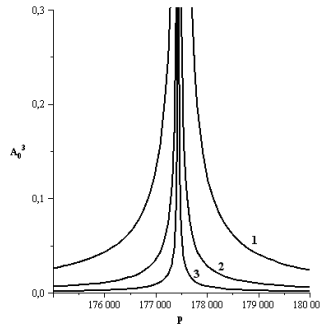
$$w \equiv 0, \quad \Omega_3 = A_0^2 e^{ipt}, \quad \Psi = A_0^3 e^{ipt}. \quad (86)$$

Для обеих задач определены амплитуды вынужденных колебаний и условия резонанса. Результаты численных вычислений в диссертационной работе приведены на рисунках. В частности здесь приведена зависимость безразмерной амплитуды  $A_1^3$  величины  $\Psi$  (т.е. деленной на максимальное значение соответствующей величины статической задачи) от частоты возмущающей силы (рис. 2). Для физических параметров взяты приведенные выше значения; размеры стержня:  $a = 0.2m$ ,  $h = 0.005m$ .



**Рис.2.** Безразмерная амплитуда  $A_1^3$  величины  $\Psi$  вынужденных колебаний стержня.

Отметим, что при вынужденных колебаниях резонансное явление отличается от аналогичного явления по классической теории упругих стержней. Это объясняется свободными вращениями точек стержня, которые создают новые степени свободы. Поэтому, в случае микрополярного материала, появляются новые резонансные частоты. В этом направлении весьма важен следующий эффект - в микрополярном упругом стержне имеется собственная частота акустического резонанса материала стержня, не зависящая от ее размеров (рис. 3). Указанный резонансный пик практически не зависит от значений  $a$ . На рис. 3 графики получены для приведенного выше материала стержня для ее различных размеров: 1.  $a = 0.1м$ , 2.  $a = 0.2м$ , 3.  $a = 0.4м$ ,  $\delta = 1/40$ .



**Рис.3.** Безразмерная амплитуда  $A_0^3$  величины  $\Psi$ , не зависящая от размеров стержня.

Задача вынужденных колебаний рассмотрена также на основе одномерной микрополярной модели (37)-(39), (33), (32) с независимыми полями перемещений и вращений. Результаты численных вычислений в диссертационной работе приведены на рисунках.

**В §3.2., §3.3.** задачи свободных и вынужденных колебаний микрополярных упругих ортотропных шарнирно опертых стержней решены соответственно для одномерных динамических моделей со стесненным вращением и “с малой сдвиговой жесткостью” с учетом и без учета поперечных сдвигов. Результаты численных вычислений в диссертационной работе приведены на таблицах и рисунках.

**В §3.4.** решена задача динамической устойчивости микрополярных упругих ортотропных стержней на основе общей одномерной динамической модели с независимыми полями перемещений и вращений с учетом поперечных сдвигов. Линеаризованные уравнения возмущенного движения (изгибные колебания) по общей модели (29)-(33) будут выражаться следующим образом (здесь пренебрежено членом

$$\left. \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right):$$

$$2hA_{78} \frac{\partial w}{\partial x_1} + 2hA_{88} \Psi - \frac{2h^3}{3} \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + 2h(A_{88} - A_{78})\Omega_3 = 0,$$

$$(2hA_{77} - N) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2hA_{78} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + 2h(A_{78} - A_{77}) \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1} = 2h\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (87)$$

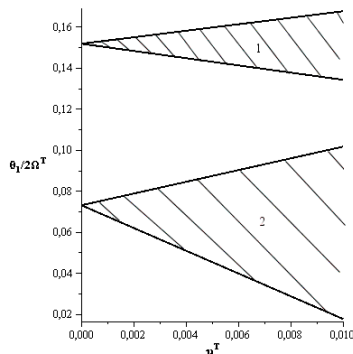
$$(A_{77} - A_{78}) \frac{\partial w}{\partial x_1} + (A_{78} - A_{88}) \Psi - (A_{77} + A_{88} - 2A_{78}) \Omega_3 + B_{66} \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial x_1^2} = I \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}.$$

К этой системе уравнений микрополярных упругих ортотропных стержней следует присоединить граничные условия (81). Начальные условия при  $t = 0$  считаются заданными соответствующим образом.

Решение задачи (86), (83) отыщено в виде

$$w = f_1(t) \sin \frac{\pi x_1}{a}, \quad \Psi = f_2(t) \cos \frac{\pi x_1}{a}, \quad \Omega_3 = f_3(t) \cos \frac{\pi x_1}{a}. \quad (88)$$

Полученное решение задачи динамической устойчивости шарнирно опертого микрополярного упругого ортотропного стержня по общей модели (87), (88) сравнены с соответствующим решением классической теории (рис.4). На указанной рисунке область динамической неустойчивости 1 соответствует микрополярной общей модели (87), (88), а область 2- классической теории. Для физических параметров были взяты приведенные выше значения; размеры стержня:  $a = 0.2\text{м}$ ;  $h = 0.005\text{м}$ . Как видно из рис.4, если материал стержня микрополярный, тогда по сравнению с классическим случаем, при общих равных условиях, область главного параметрического резонанса передвигается в области высоких частот и сужается.



**Рис. 4.** Области неустойчивости по микрополярной модели с учетом поперечных сдвигов и по классической модели стержня.

Задача динамической устойчивости микрополярных упругих ортотропных стержней решена также на основе микрополярной одномерной модели с независимыми полями перемещений и вращений без учета поперечных сдвигов. Результаты численных вычислений в диссертационной работе приведены на графиках.

**В заключении** представлены основные результаты диссертационной работы. В диссертационной работе развивается подход С.О. Саркисяна и построена общая динамическая модель изгибаемой деформации микрополярных упругих ортотропных стержней. Построены также частные динамические модели микрополярных упругих ортотропных стержней со стесненным вращением и “с малой сдвиговой жёсткостью” с учетом, а также без учета поперечных сдвиговых деформаций. На основе построенных моделей изучаются задачи о свободных и вынужденных колебаниях микрополярных упругих ортотропных стержней. Поставлена и изучена задача о

динамической устойчивости микрополярного упругого ортотропного стержня, при которой определены главные области динамической неустойчивости. Устанавливаются характерные особенности динамического поведения микрополярных стержней, специфические свойства микрополярного ортотропного материала.

В работе, в частности, получены следующие новые результаты:

Обобщаются на ортотропный случай гипотезы С.О. Саркисяна построения модели динамической изгибной деформации микрополярных упругих изотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений [5,7-9].

- Построена математическая модель микрополярных упругих ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений с полным учетом поперечных сдвиговых и родственных деформаций [5,7-9].
- Получена модель динамики микрополярных упругих ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений без учета поперечных сдвиговых деформаций [5,7-9].
- Получены модели динамики микрополярных упругих ортотропных стержней со стесненным вращением и “с малой сдвиговой жесткостью”, как с полным учетом поперечных сдвиговых деформаций, так и без их учета [5].
- Асимптотическим методом изучается начально-краевая двумерная задача плоской микрополярной теории упругости для ортотропного материала в области тонкого прямоугольника. Построены и решены внутренняя задача, погранслои по координатам и времени [1,2,4].
- Устанавливаются качественные стороны (асимптотические свойства) решения внутренней задачи плоской микрополярной теории упругости в тонком прямоугольнике. Построены одномерные уравнения асимптотической модели микрополярных упругих ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений [1,2,4].
- Изучаются задачи сращивания внутренней и погранслоиных задач (погранслои по координатам и времени). Определяются граничные и начальные условия асимптотической модели микрополярных упругих ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений [1,2,4].
- Построена прикладная одномерная асимптотическая модель динамики изгибной деформации микрополярных упругих ортотропных стержней с независимыми полями перемещений и вращений [1,2,4].
- При помощи сравнения общей и асимптотической одномерных моделей динамики микрополярных упругих ортотропных стержней, обосновываются принятые гипотезы [4].
- На основе построенных моделей изучаются задачи о свободных и вынужденных колебаниях микрополярных упругих ортотропных стержней. Определены частоты собственных колебаний, амплитуды вынужденных колебаний и условия резонанса для микрополярных стержней. На основе численного анализа выявляются основные специфические свойства микрополярного ортотропного материала стержня в зависимости от ее геометрических размеров и значений упругих констант [3,5,6,9].
- Показано, что в стержнях из микрополярного упругого ортотропного материала имеется собственная частота акустического резонанса, которая не зависит от размеров стержня, а зависит только от физических и инерционных свойств микрополярного ортотропного материала [3,6,9].

- Показано, что в выборе микрополярного ортотропного материала есть достаточно возможностей урегулировать значения низких частот собственных колебаний и, тем самым, достичь значительного разнеса частот собственных колебаний стержней, что важно при явлении резонанса [3,5,6,9].
- Изучена задача о динамической устойчивости микрополярного упругого ортотропного стержня. Определяются главные области динамической неустойчивости. Полученные результаты сравниваются с результатами, полученными на основе классической модели. Устанавливаются некоторые характерные свойства микрополярного материала стержня [6].

### **Перечень публикаций по теме диссертации**

1. Маргарян Л.М. Математическая модель динамической задачи микрополярных упругих ортотропных стержней// Сборник трудов международной школы-конференции молодых ученых Механика 2009. 28 сентября-1 октября. Агавнадзор, Армения. Ереван: Изд-во: ЕГУ АС, 2009. С. 241-246.
2. Маргарян Л. М. Динамическая задача изгиба ортотропных микрополярных упругих тонких стержней// Сборник научных трудов международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”. 4-8 октября, 2010. Дилижан, Армения. Ереван: Изд-во ЕГУ АС. Том 2. С.13-17.
3. Маргарян Л.М. О некоторых задачах собственных и вынужденных колебаний микрополярных ортотропных упругих тонких стержней//Материалы республиканской научной конференции. 28-29 ноября, 2011. Гюмри, Армения. Гюмри: Изд-во: “Элдорадо”, 2012. С. 17-22.
4. Маргарян Л.М. Построение прикладной динамической модели микрополярных ортотропных упругих тонких стержней асимптотическим методом//Сборник научных трудов международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, посвященной столетию академика Нагуша Арутюняна. 08-12 октября, 2012, Цахкадзор, Армения. Т.2. Ереван: Изд-во ЕГУАС, 2012. С.19-23.
5. Маргарян Л.М., Саркисян С.О. Математические модели динамики микрополярных анизотропных (ортотропных) упругих тонких стержней// Известия НАН Армении. Механика. 2012. Т. 65. N 1. С. 17-28.
6. Саркисян С. О., Маргарян Л.М. Колебания и динамическая устойчивость микрополярных ортотропных упругих тонких стержней// Сборник трудов всероссийской конференции Нелинейные колебания механических систем. 24-28 сентября, 2012. Нижний Новгород. С.845-855.
7. Sargsyan S. H., Hayrapetyan G. S., Margaryan L.M., Alvajyan Sh.I. Mathematical models of micropolar elastic thin bars and plates//Book of Abstracts of 13<sup>th</sup> International Conference of Mesomechanics. Vicenza, Italy 6-8 July, 2011. P.60-63.
8. Sargsyan S.H., Margaryan L. M. Mathematical Model of Dynamics of Micropolar Anisotropic Elastic Thin Bars with Free Rotation// Proceedings of the XXXIX Summer School-Conference. Advanced Problems in Mechanics. APM 2011. St.Petersburg (Repino). July 1-5, 2011. P.399-407.
9. Sargsyan S.H., Margaryan L.M. Mathematical Model of Dynamics of Micropolar Orthotropic Elastic Thin Bars with Free Fields of Displacements and Rotations.//Journal of Mechanics Engineering and Automation. 2012. Vol. 2. N2. P.110-118.

## Անփոփում

Ստենախոսական աշխատանքում զարգացված է Ս.Չ. Սարգսյանի մոտեցումը և կառուցված է միկրոպոլյար առաձգական օրթոտրոպ ձողերի ծոման անկախ տեղափոխություններով և պտույտներով դինամիկական մոդելը: Կառուցված են նաև միկրոպոլյար առաձգական օրթոտրոպ ձողերի կաշկանդված պտույտներով և «փոքր սահքային կոշտությամբ» մասնավոր մոդելները, երբ հաշվի են առնված լայնական սահքային դեֆորմացիաները և երբ դրանք արհամարված են: Կառուցված մոդելների հիման վրա ուսումնասիրված են միկրոպոլյար առաձգական օրթոտրոպ ձողերի սեփական և ստիպողական տատանումների խնդիրները: Քննարկված է միկրոպոլյար առաձգական օրթոտրոպ ձողերի դինամիկական կայունության խնդիրը, որոշված են դինամիկական անկայունության գլխավոր տիրույթները: Բացահայտված են միկրոպոլյար ձողերի դինամիկական պահվածքի բնութագրիչ առանձնահատկությունները և միկրոպոլյար օրթոտրոպ նյութի յուրահատկությունները:

Աշխատանքում, մասնավորապես, ստացվել են հետևյալ նոր արդյունքները.

- Միկրոպոլյար առաձգական իզոտրոպ ձողերի ծոման անկախ տեղափոխություններով և պտույտներով դինամիկական մոդելի կառուցման համար ձևակերպված Ս. Չ. Սարգսյանի վարկածներն ընդհանրացվո՞ած են օրթոտրոպ դեպքի համար [5,7-9]:
- Կառուցված է միկրոպոլյար առաձգական օրթոտրոպ ձողերի անկախ տեղափոխություններով և պտույտներով մաթեմատիկական մոդելը, որտեղ լիովին հաշվի են առնված լայնական սահքային դեֆորմացիաները [5,7-9]:
- Ստացված է միկրոպոլյար առաձգական օրթոտրոպ ձողերի անկախ տեղափոխություններով և պտույտներով դինամիկական մոդելը, որտեղ արհամարվում են լայնական սահքային դեֆորմացիաները [5,7-9]:
- Ստացված են միկրոպոլյար առաձգական օրթոտրոպ ձողերի կաշկանդված պտույտներով և «փոքր սահքային կոշտությամբ» դինամիկական մոդելները, ինչպես լայնական սահքերի հաշվի առնմամբ, այնպես էլ դրանց անտեսմամբ [5]:
- Ասիմպտոտիկ մեթոդի միջոցով բարակ ուղղանկյան տիրույթում ուսումնասիրված է միկրոպոլյար առաձգականության տեսության երկչափ նախնական-եզրային խնդիրը օրթոտրոպ նյութի համար: Կառուցված և լուծված են ներքին խնդիրը, ըստ կոորդինատների և ժամանակի սահմանային շերտերը [1,2,4]:
- Բարակ ուղղանկյան համար բացահայտված են հարթ միկրոպոլյար առաձգականության տեսության ներքին խնդրի լուծման որակական կողմերը (ասիմպտոտիկ հատկությունները): Կառուցված են միկրոպոլյար առաձգական օրթոտրոպ ձողերի անկախ տեղափոխություններով և պտույտներով ասիմպտոտիկ մոդելը [1,2,4]:
- Ուսումնասիրված են ներքին խնդրի և սահմանային շերտերի (ըստ կոորդինատների ու ժամանակի) համակցման խնդիրները: Որոշված են միկրոպոլյար

առաձգական օրթոտրոպ ձողերի անկախ տեղափոխություններով և պտույտներով ասիմպտոտիկ մոդելի եզրային և նախնական պայմանները [1,2,4]:

- Կառուցված է միկրոպոլյար առաձգական օրթոտրոպ ձողերի ծոման անկախ տեղափոխություններով և պտույտներով կիրառական միաչափ ասիմպտոտիկ դինամիկական մոդելը [1,2,4]:
- Միկրոպոլյար առաձգական օրթոտրոպ ձողերի ընդհանուր և ասիմպտոտիկ միաչափ դինամիկական մոդելների համեմատության հիման վրա հիմնավորվում են ընդունված վարկածները [4]:
- Կառուցված մոդելների հիման վրա ուսումնասիրված են միկրոպոլյար առաձգական օրթոտրոպ ձողերի սեփական և ստիպողական տատանումների խնդիրները: Որոշված են սեփական տատանումների հաճախականությունները, ստիպողական տատանումների ամպլիտուդաները և ռեզոնանսի պայմանները միկրոպոլյար ձողերի համար [3,5,6,9]:
- Թվային վերլուծության արդյունքում բացահայտված են միկրոպոլյար օրթոտրոպ ձողի նյութի հիմնական հատկությունները՝ կախված միկրոպոլյար օրթոտրոպ նյութի առաձգական հաստատունների ընդունած արժեքներից և ձողի երկրաչափական չափերից [3,5,6,9]:
- Յույց է տրված, որ միկրոպոլյար առաձգական օրթոտրոպ ձողում գոյություն ունի ակուստիկ ռեզոնանսի այնպիսի սեփական հաճախականություն, որը կախված չէ ձողի հատկություններից, այլ կախված է միայն նրա նյութի ֆիզիկական և իներցիոն հատկություններից [3,6,9]:
- Յույց է տրված, որ միկրոպոլյար օրթոտրոպ նյութի ընտրության բավականին լայն հնարավորություններ կան՝ սեփական տատանումների փոքր հաճախականությունների արժեքները կարգավորելու համար: Դրանով հանդերձ կարելի է հասնել ձողերի սեփական տատանումների մեծ տարանջատման, ինչը կարևոր է ռեզոնանսի դեպքում [3,5,6,9]:
- Ուսումնասիրված է միկրոպոլյար առաձգական օրթոտրոպ ձողերի դինամիկական կայունության խնդիրը: Որոշված են դինամիկական անկայունության գլխավոր տիրույթները: Ստացված արդյունքները համեմատվում են դասական տեսության հիման վրա ստացված արդյունքների հետ: Բացահայտվում են ձողի միկրոպոլյար նյութի որոշ հատկություններ [6]:



## Abstract

In the dissertation work S.H. Sargsyan's approach is developed and general dynamic model of bending deformation of micropolar elastic orthotropic thin bars with free fields of displacements and rotations is constructed. Private models of micropolar elastic orthotropic bars with constrained rotation and "small shear rigidity" are constructed with and without consideration of shear deformations. On the basis of constructed models problems of free and forced vibrations of micropolar elastic orthotropic bars are studied. Specific properties of the micropolar orthotropic material of the bar are established. Problem of dynamic stability of micropolar elastic orthotropic bars is studied, main areas of dynamic instability and the role of the micropolarity of bar material are defined. Characteristics of dynamic behavior of micropolar bars and specific properties of micropolar orthotropic material are established.

In the dissertation work, particularly, following new results are obtained:

- S.H. Sargsyan's hypotheses for the construction of the model of dynamic bending deformation of micropolar elastic isotropic bars with free fields of displacements and rotations are generalized for orthotropic case [5,7-9].
- Mathematical model of micropolar elastic orthotropic bars with free fields of displacements and rotations is constructed, where transverse shears and related deformations are completely taken into account [5,7-9].
- Mathematical model of micropolar elastic orthotropic bars with free fields of displacements and rotations is obtained, where transverse shears and related deformations are completely taken into account [5,7-9].
- Dynamic models of micropolar elastic orthotropic bars with constrained rotation and "small shear rigidity" are obtained both with and without consideration of shear deformations [5].
- Initial-boundary value problem of the plane micropolar theory of elasticity for orthotropic material is studied in the domain of thin rectangle with the help of the asymptotic method. Internal problem, boundary layers of coordinates and time are constructed and solved [1,2,4].
- Qualitative results (asymptotic properties) of the solution of internal problem of the plane micropolar theory of elasticity in thin rectangle are established. One-dimensional equations of the asymptotic model of micropolar elastic orthotropic bars with free fields of displacements and rotations are constructed [1,2,4].
- Problem of jointing of the internal problem and boundary layers is studied (boundary layers of coordinates and time). Boundary and initial conditions of the asymptotic model of micropolar elastic orthotropic bars with free fields of displacements and rotations are determined [1,2,4].
- Applied one-dimensional asymptotic model of dynamics of micropolar elastic orthotropic bars with free fields of displacements and rotations is constructed [1,2,4].
- Accepted hypotheses are substantiated on the basis of comparison of the general and asymptotic one-dimensional models of dynamics of micropolar elastic orthotropic bars [4].
- On the basis of the constructed models problems of free and forced vibrations of micropolar elastic orthotropic bars are studied. Frequencies of free vibrations, amplitudes of forced vibrations and conditions of resonance of the micropolar bars are determined. On the basis of the numerical analysis specific properties of the micropolar

orthotropic material of the bar are established, depending on values of elastic constants of the micropolar orthotropic material and geometric sizes of the bar [3,5,6,9].

- It is shown that there is a natural frequency of acoustic resonance in micropolar elastic orthotropic bars, that does not depend on bar sizes, but depend only on its physical and inertial properties [3,6,9].
- It is shown that there are rather possibilities in the choice of the micropolar orthotropic material to adjust values of low frequencies of the bars and thereby to achieve a significant separation of natural frequencies of bars, which is important in the phenomenon of resonance [3,5,6,9].
- Problem of dynamic stability of micropolar elastic orthotropic bars is studied. Main areas of dynamic instability are defined. Obtained results are compared with the results of the classical theory. Some characteristic properties of micropolar material of the bar are established [6].